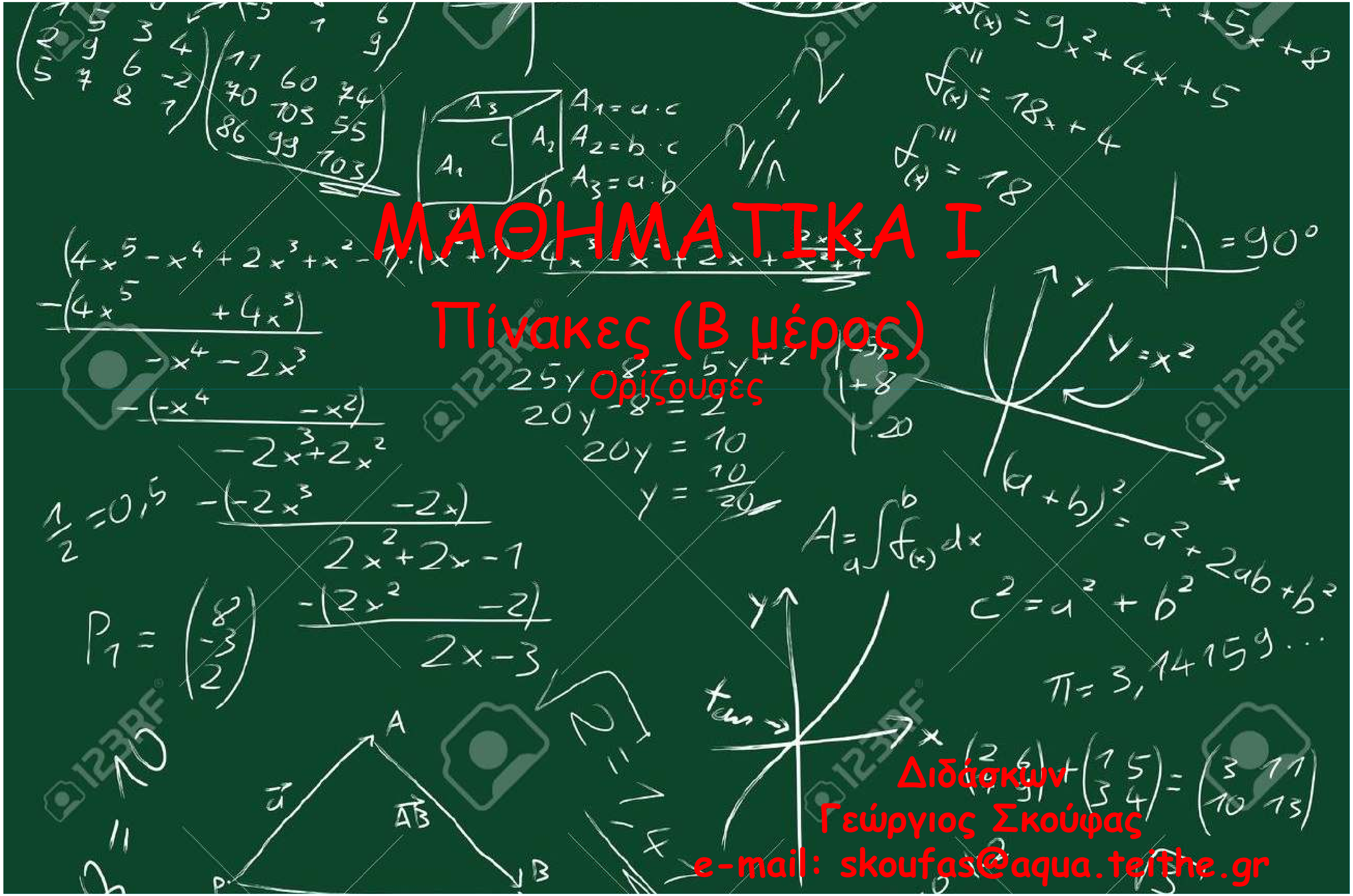
**ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε.**



# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

## Πίνακες (Β μέρος)

Ορίζουσες


**Διδάσκων**

**Γεώργιος Σκούφας**

**e-mail: skoufas@aqua.teithe.gr**

Ορίζουσα πίνακα

# Τι είναι η ορίζουσα;

## What is a determinant?

The **determinant** of a **square matrix** is a **number** obtained in a specific manner from the matrix.

For a 1x1 matrix:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{11}] \;;\quad \det(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11}$$

For a 2x2 matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix} \;;\quad \det(\mathbf{A}) = \mathbf{a}_{11}\mathbf{a}_{22} - \mathbf{a}_{12}\mathbf{a}_{21}$$

Product along red arrow minus product along blue arrow

Ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα Α 2 γραμμών και 2 στηλών είναι μία σχετικά απλή διαδικασία όπως φαίνεται παρακάτω.

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \bullet d - c \bullet b$$

Και ένα αριθμητικό παράδειγμα είναι το παρακάτω

$$\det\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 8 \bullet 2 - 4 \bullet 3 = 16 - 12 = 4$$

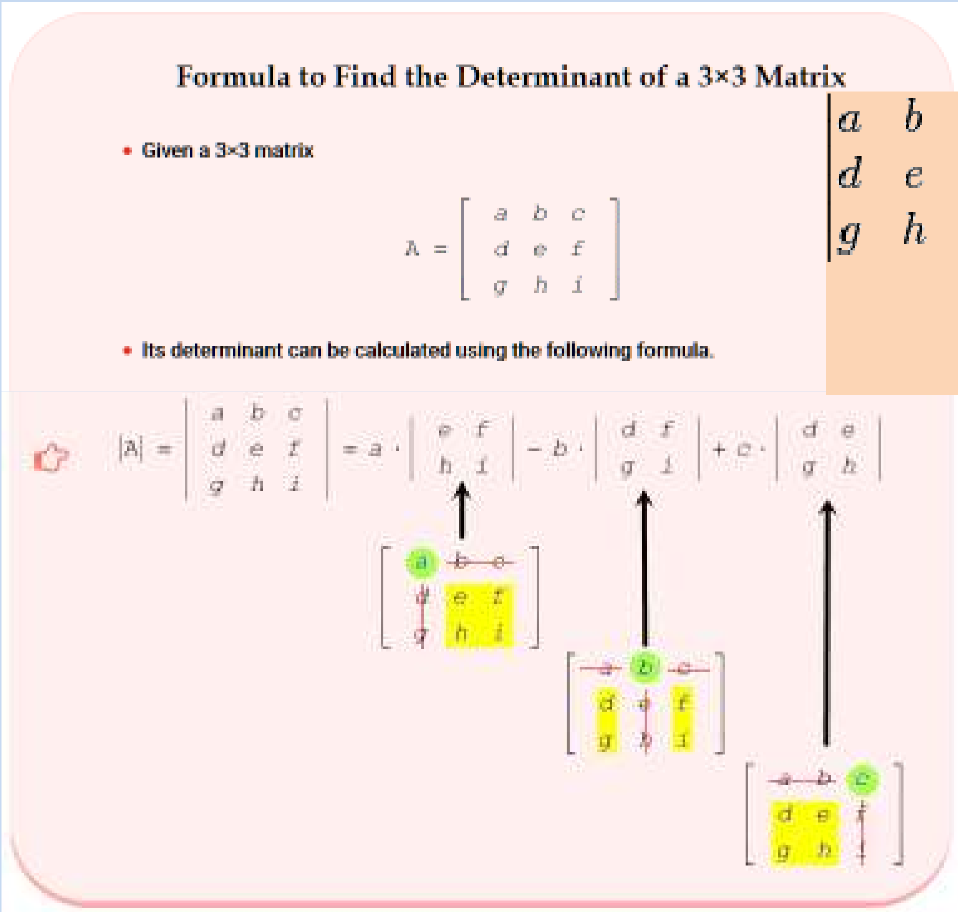
Και πως θα βρούμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού 3x3 πίνακα;

Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 3x3 επιλέγουμε μία οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη της ορίζουσας και υπολογίζουμε κάθε στοιχείο της με την 2x2 ορίζουσα που προκύπτει αν διαγράψουμε τη γραμμή και τη στήλη στην οποία βρίσκεται το στοιχείο αυτό. Προσθέτουμε ή αφαιρούμε τα γινόμενα χρησιμοποιώντας τον πίνακα πρόσημων.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ορίζουσα πίνακα

# Ορίζουσα 3x3




$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

# Πρόσημα

Είδαμε πως στην εύρεση της ορίζουσας έχει μια σειρά από πράξης.
Το βασικό στοιχεί για να βρούμε το πρόσημο των γινομένων δίνεται εμπειρικά από τον παρακάτω πίνακα.
Κάθε στοιχείο ενός πίνακα 3x3 αλλά και μεγαλύτερων διαστάσεων φέρει ένα πρόσημο!
Το ίδιο ισχύει και για έναν πίνακα 2x2.

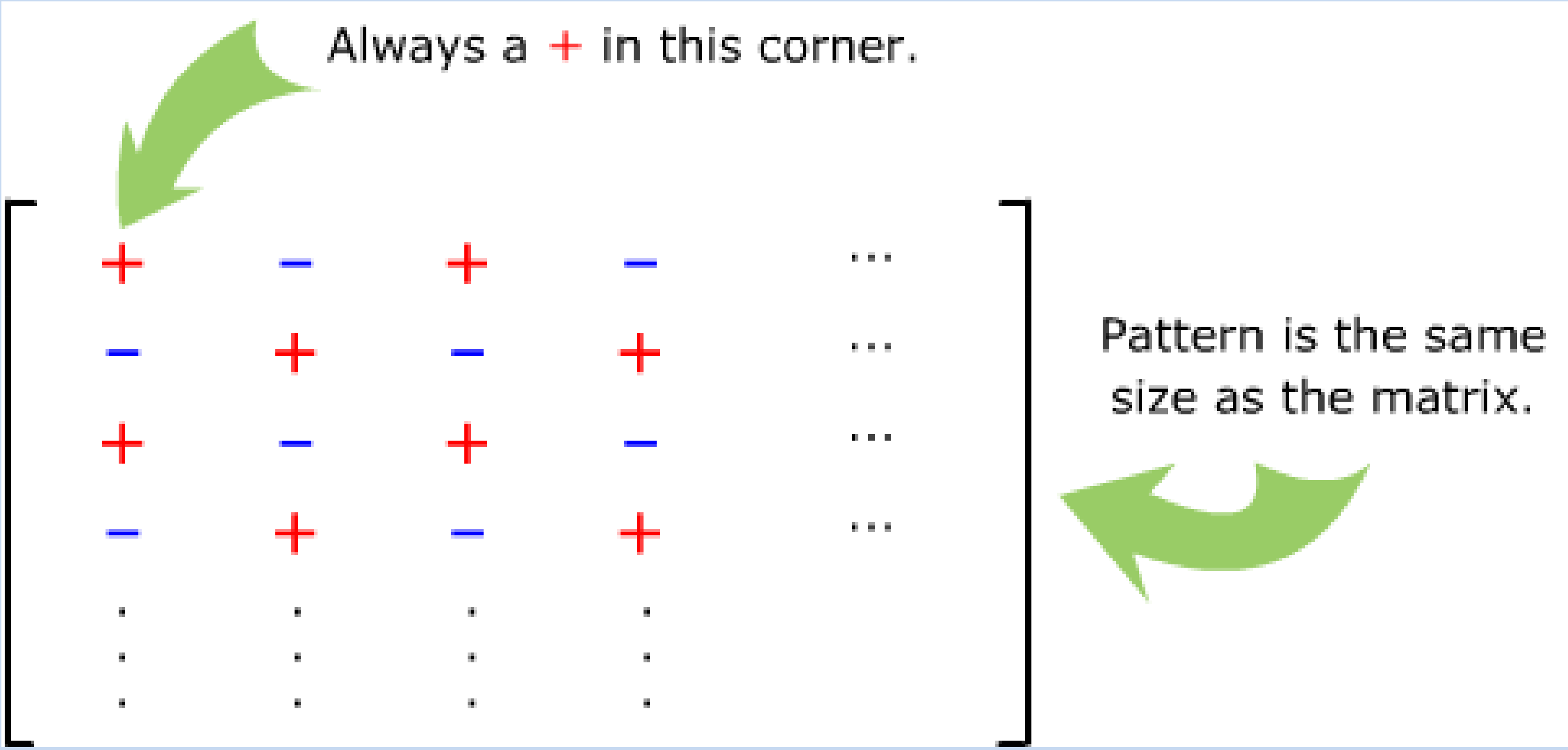
## SIGN SYSTEM FOR EXPANSION OF DETERMINANT

Sign System for order 2 and order 3 are given by

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

# Πρόσημα

Η γενικευμένη μορφή είναι …



## Ορίζουσα πίνακα 3x3

### Παράδειγμα κατανόησης

Για τον πίνακα A, ας εξετάσουμε τις πιθανές ορίζουσες.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου παίρνουμε τα στοιχεία των τριών γραμμών:

Αν πάρουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{vmatrix} =$$

$$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{vmatrix} - (\mathbf{-2}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{vmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} =$$

$$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1} \cdot ((\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{5} - (\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{1})) - (\mathbf{-2}) \cdot (\mathbf{2} \cdot \mathbf{5} - (\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{1}) + \mathbf{1}(\mathbf{2} \cdot \mathbf{1} - (\mathbf{-1}) \cdot \mathbf{1}) =$$

$$|\boldsymbol{A}| = \mathbf{1} \cdot (\mathbf{-4}) - (\mathbf{-2}) \cdot \mathbf{11} + \mathbf{3} = \mathbf{-4} - (\mathbf{-22}) + \mathbf{3} = \boxed{\mathbf{21}}$$

Για τον πίνακα $A$, ας εξετάσουμε τις πιθανές ορίζουσες.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Αν πάρουμε τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής:

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$|\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$|\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot\big((-2)\cdot 5-1\cdot 1\big)+(-1)\cdot(1\cdot 5-1\cdot 1)-(-1)\cdot(1\cdot 1-(-2)\cdot 1)=$$

$$|\boldsymbol{A}|=(-2)\cdot(-11)+(-1)\cdot 4+3=22-4+3=\boxed{21}$$

Για τον πίνακα $A$, ας εξετάσουμε τις πιθανές ορίζουσες.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Αν πάρουμε τα στοιχεία της τρίτης γραμμής:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot \big((-2) \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)\big) - 1 \cdot (1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) + 5 \cdot (1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2) =$$

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 = 3 + 3 + 15 = \boxed{21}$$

Για τον πίνακα $A$, ας εξετάσουμε τις πιθανές ορίζουσες.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Ποια θα ήταν η ορίζουσα αν αντί για γραμμή παίρναμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}=$$

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$|A|=1\cdot\big((-1)\cdot 5-1\cdot(-1)\big)-2\cdot((-2)\cdot 5-1\cdot 1)+1\cdot((-2)\cdot(-1)-1\cdot(-1))=$$

$$|A|=1\cdot(-4)-2\cdot(-11)+1\cdot 3=-4+22+3=\boxed{21}$$

Ορίζουσα πίνακα

Υπάρχει όμως και άλλος τρόπος να βρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα ….

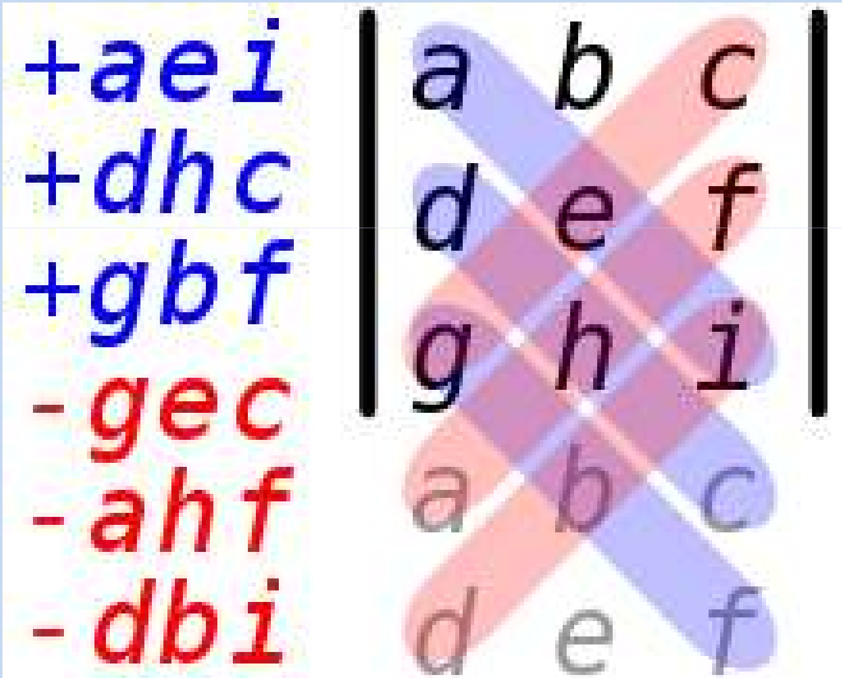
## Κανόνας του Sarrus

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$\underline{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}}-(\underline{a_{31}a_{22}a_{13}+a_{32}a_{23}a_{11}+a_{33}a_{21}a_{12}})$$

# Κανόνας του Sarrus

Θα μπορούσε όμως και να γραφεί με τη μορφή …



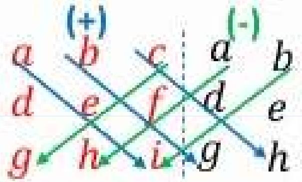
Ορίζουσα πίνακα

# Κανόνας του Sarrus

## Sarrus' Rule

- For a matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ can be calculated through following steps:

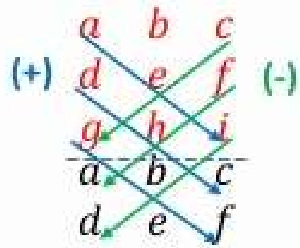
1. Add the first 2 columns of the matrix to the right of the 3rd column:




2. Subtract the sum of the products along the green arrows from the sum of products along the blue arrows:

$$|\boldsymbol{A}| = aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$$

- Note: It is also possible to add the first 2 rows of the matrix to the bottom of the 3rd row:



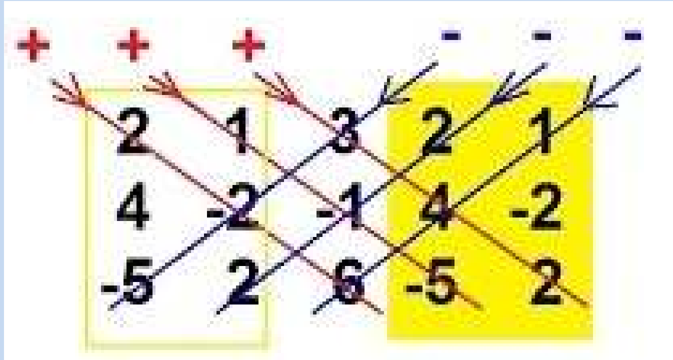

$|\boldsymbol{A}| = aei + bfg + cdh - (ceg + afh + bdi)$

Ορίζουσα πίνακα

## Κανόνας του Sarrus

### Παράδειγμα κατανόησης

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$




$$\det(A) = +(2)(-2)(6) + (1)(-1)(-5) + (3)(4)(2) - (3)(-2)(-5) - (2)(-1)(2) - (1)(4)(6)$$

$$= -45$$

Υπάρχει όμως μία ιδιαίτερη περίπτωση τετραγωνικού πίνακα 3x3, στον οποία καλούμαστε να βρούμε την ορίζουσα …

## Ορίζουσα τριγωνικού πίνακα

Η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα είναι ίση με γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου της.

*Υπενθύμιση: Τριγωνικός άνω ή τριγωνικός κάτω ορίζεται ένας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία κάτω της κύριας διαγωνίου και άνω της κυρίας διαγωνίου αντίστοιχα είναι μηδέν.*

## Ορίζουσα πίνακα 3x3

### Παράδειγμα κατανόησης

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του τριγωνικού πίνακα *Α* και με τους δύο τρόπους και να συγκριθούν οι δύο τρόποι μεταξύ τους.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

1ος τρόπος: ανάπτυγμα ορίζουσας

2ος τρόπος: γινόμενο στοιχείων κύριας διαγωνίου

Η διατύπωση των προτάσεων που ακολουθούν, θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε ευκολότερα την ορίζουσα ενός πίνακα.

## Παρατήρηση 1η

Αν όλα τα στοιχεία μίας στήλης ή μίας γραμμής είναι μηδέν, τότε η ορίζουσα του συγκεκριμένου πίνακα είναι επίσης μηδέν.

### Παράδειγμα κατανόησης

Να υπολογίσετε την ορίζουσα για τους πίνακες *A* και B.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{5}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{5}\\\mathbf{2}&\mathbf{6}&\mathbf{4}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Ιδιότητες ορίζουσα πίνακα

## Παρατήρηση 2η

Αν όλα τα στοιχεία μίας στήλης (ή γραμμής) ενός πίνακα πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε η ορίζουσα του πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

### Παράδειγμα κατανόησης

Να πολλαπλασιάσετε με 2 την πρώτη γραμμή και την στήλη του πίνακα Α.
Κατόπιν να συγκρίνεται τις δύο ορίζουσες που θα προκύψουν από τους πίνακες Α1 και Α2.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{4}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

## Παρατήρηση 3η

Αν δύο στήλες ή γραμμές μίας ορίζουσας είναι ίδιες, τότε η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν.

### Παράδειγμα κατανόησης

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

## Παρατήρηση 4η

Αν ανταλλάξουμε δύο στήλες (ή δύο γραμμές) ενός πίνακα, τότε η ορίζουσα του πολλαπλασιάζεται με -1.

### Παράδειγμα κατανόησης

Να εξετάσετε αν ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

## Παρατήρηση 5η

Αν ανταλλάξουμε δύο στήλες (ή δύο γραμμές) ενός πίνακα, τότε η ορίζουσα του πολλαπλασιάζεται με -1.

### Παράδειγμα κατανόησης

Στον πίνακα *A* να πολλαπλασιάσετε την τρίτη γραμμής με το 2 και να την προσθέσετε στην πρώτη. Στον καινούριο πίνακα που θα προκύψει να υπολογίσετε την ορίζουσα και να τη συγκρίνεται με την αρχική ορίζουσα.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

## Σημαντική παρατήρηση για τον υπολογισμό της ορίζουσας

Ένας εύκολος τρόπος για τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι να μετατρέψουμε τον οποιοδήποτε πίνακα σε τριγωνικό (άνω ή κάτω δεν έχει σημασία) και να υπολογίσουμε την ορίζουσα ως το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

## Παράδειγμα κατανόησης

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Ορίζουσες πινάκων
Ιδιότητες

## Βήμα 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή x(-2) και την προσθέτουμε στη δεύτερη (η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1\cdot(-2) & 2\cdot(-2) & -1\cdot(-2) & 2\cdot(-2) \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

## Βήμα 2

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή x(-1) και την προσθέτουμε στη τέταρτη γραμμή (η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει)

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1\cdot(-1)} & \mathbf{2\cdot(-1)} & \mathbf{-1\cdot(-1)} & \mathbf{2\cdot(-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

## Βήμα 3

Αλλάζουμε τη δεύτερη γραμμή με την τρίτη και η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

Ορίζουσες πινάκων
Ιδιότητες

## Βήμα 4

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή x(-1) και προσθέτουμε στην τέταρτη γραμμή (η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει)

$$|\boldsymbol{A}| = -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0\cdot(-1)} & \mathbf{4\cdot(-1)} & \mathbf{0\cdot(-1)} & \mathbf{1\cdot(-1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = -\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$$

## Βήμα 5

Προσθέτουμε την τρίτη γραμμή στην τέταρτη (η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει)

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

## Βήμα 6

Εφαρμόζουμε τον ορισμό που αφορά τον τριγωνικό πίνακα, σύμφωνα με τον οποίο η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -\big(1 \cdot 4 \cdot (-1) \cdot (-3)\big) = -(-12) = \boxed{12}$$

Ο γενικός κανόνας για την εύρεση της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα 4x4 είναι ο ακόλουθος:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & o & \pi \end{vmatrix}$$

$$A = (-1)^2 \cdot \alpha \cdot \begin{vmatrix} \zeta & \eta & \theta \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \xi & o & \pi \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot \beta \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \eta & \theta \\ \iota & \lambda & \mu \\ \nu & o & \pi \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot \gamma \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta & \theta \\ \iota & \kappa & \mu \\ \nu & \xi & \pi \end{vmatrix} + (-1) \cdot \delta \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta & \eta \\ \iota & \kappa & \lambda \\ \nu & \xi & o \end{vmatrix}$$

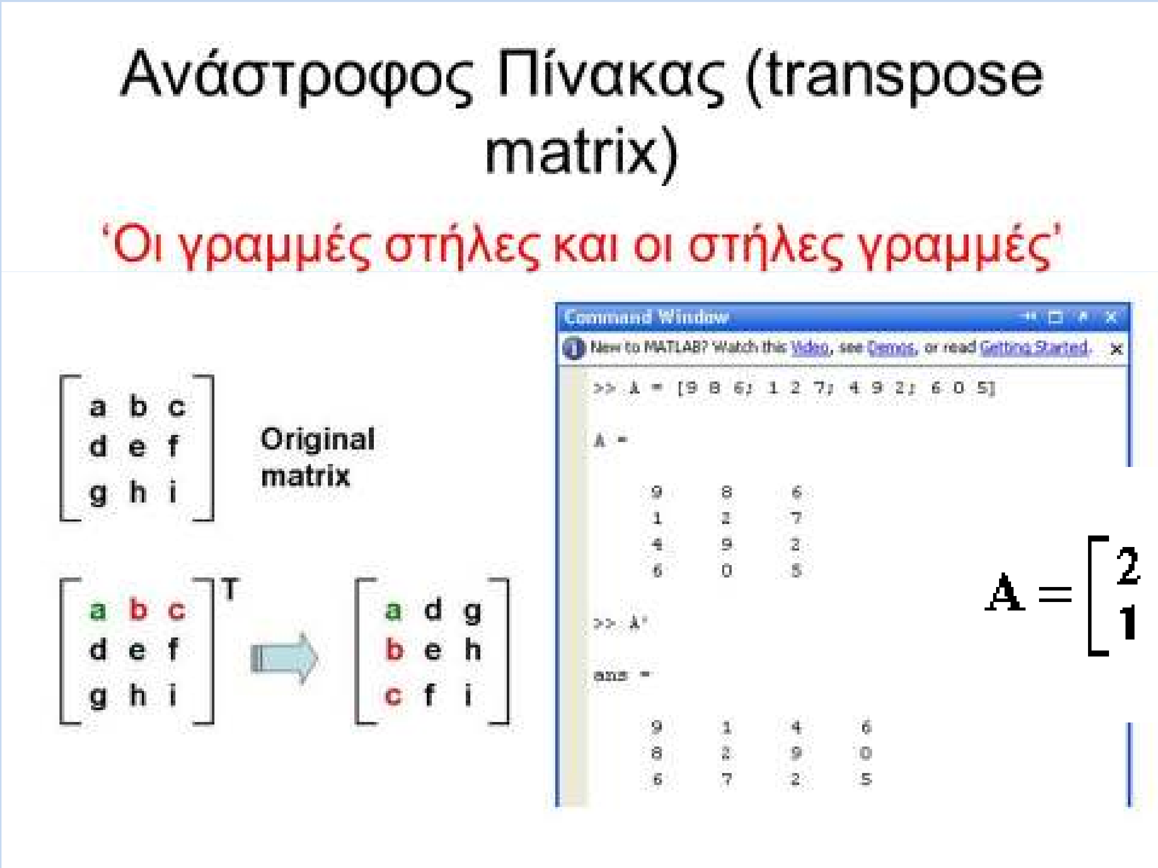
Όπου σε κάθε περίπτωση:

$$\begin{vmatrix} \zeta & \eta & \theta \\ \kappa & \lambda & \mu \\ \xi & o & \pi \end{vmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; \begin{vmatrix} \varepsilon & \eta & \theta \\ \iota & \lambda & \mu \\ \nu & o & \pi \end{vmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta & \theta \\ \iota & \kappa & \mu \\ \nu & \xi & \pi \end{vmatrix} \; \kappa\alpha\iota \; \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta & \eta \\ \iota & \kappa & \lambda \\ \nu & \xi & o \end{vmatrix}$$

Εφαρμόζουμε ότι είδαμε στην εύρεση της ορίζουσας ενός πίνακα 3x3

## Παρατήρηση 6η

Μία άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι η ορίζουσα ότι η ορίζουσα κάθε τετραγωνικού πίνακα είναι ίσης με την ορίζουσα του ανάστροφού του πίνακα.




$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad A^T=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 3 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$

# Example6 The Product of a Matrix and Its Transpose Is Symmetric

Let $A$ be the $2 \times 3$ matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Then

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -11 \\ -2 & 4 & -8 \\ -11 & -8 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -17 \\ -17 & 34 \end{bmatrix}$$

Observe that $A^T A$ and $A A^T$ are symmetric as expected.

## Γενικό συμπέρασμα …

Στη συγκεκριμένη ενότητα είδαμε τρεις διαφορετικούς τρόπους για να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα. (προς χάρη ευκολίας λάβαμε υπόψη τον τετραγωνικό πίνακα διαστάσεων 3x3)

1ο τρόπος

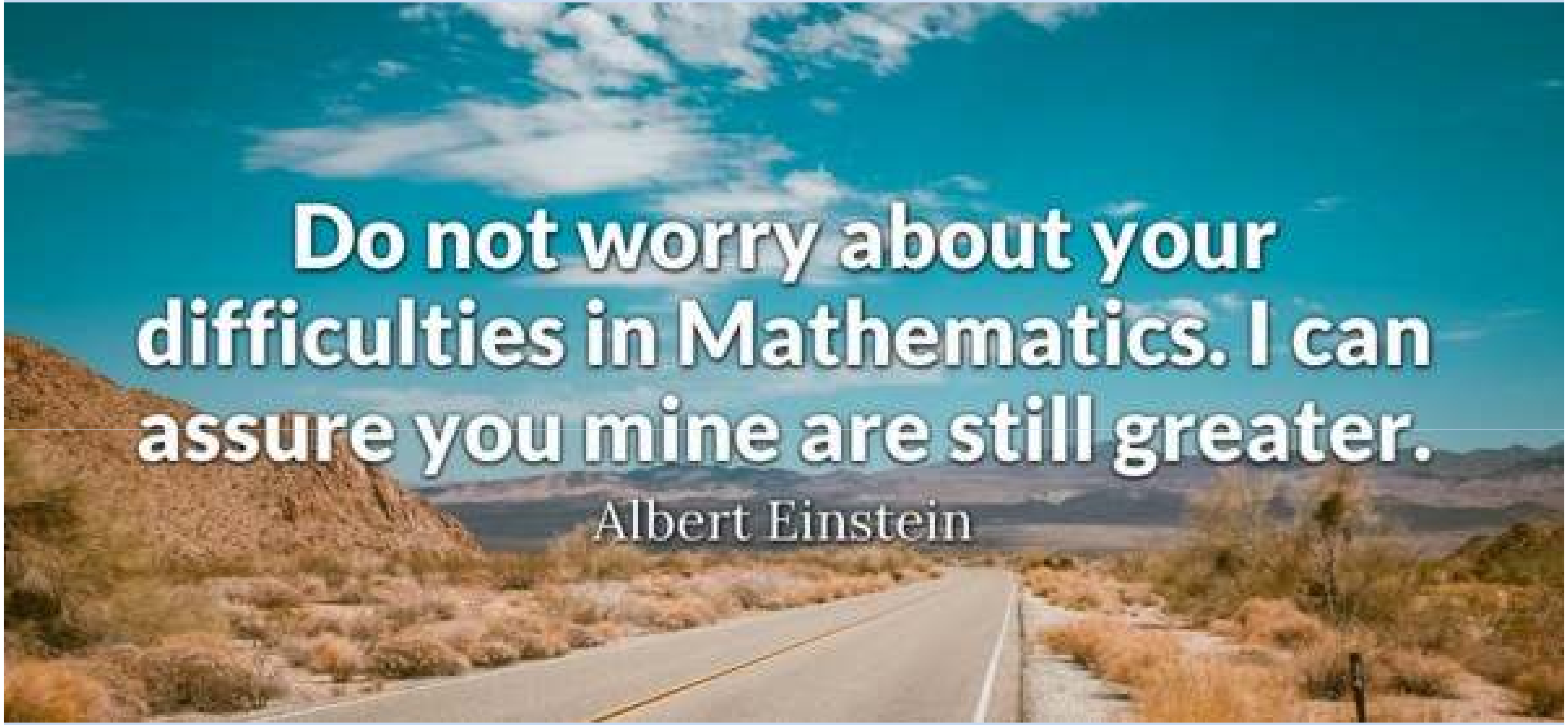
Ανάπτυγμα

2ο τρόπος

εφαρμογή του νόμου του SARRUS

3ο τρόπος

Μετατροπή του πίνακα σε τριγωνικό




**Διδάσκων**
**Γεώργιος Σκούφας**
**e-mail: skoufas@aqua.teithe.gr**